1

Probabilité (Niveau 2A)

1) On répète une épreuve de Bernoulli de manière indépendante de succès "la partie est gagnée" ayant pour probabilité $\frac{1}{10}$.

La variable X_N compte le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètre $p = \frac{1}{10}$ et N

$X \hookrightarrow B(N ; \frac{1}{10})$

$X_N(\Omega) = [\![0 ; N]\!]$

$$\boxed{P(X_N = k) = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{N-k}}$$

et $\boxed{E(X_N) = \frac{N}{10}}$; $\boxed{Var(X_N) = \frac{9N}{100}}$

2) Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur. Lorsque le joueur remporte la partie il remporte 3€ ou alors s'il perd, il perd également les 1€ qu'il avait misé donc

$$\boxed{Y_N = 3X_N - N}$$

On en déduit que

$E(Y_N) = E(3X_N - N)$

$= 3E(X_N) - N$

$$E(Y_N) = 3 \times \frac{N}{10} - N$$

$$= \frac{3N - 10N}{10}$$

$$\boxed{E(Y_N) = \frac{-7N}{10}}$$

De plus,

$$Var(Y_N) = Var(3X_N - N)$$

$$= 9\,Var(X_N)$$

$$= 9 \times \frac{9N}{100}$$

$$\boxed{Var(YN) = \frac{81N}{100}}$$

3) (a) On peut considérer que la loi de poisson est une loi binomiale allant vers l'infini donc correspondrait à l'espérance de la loi binomiale. Donc si X_{60} suit une loi de poisson le paramètre peut être déterminé par l'espérance de la binomiale de X_n ainsi $E(X_{60}) = \frac{60}{10} = 6$

Donc $\boxed{\lambda = 6}$

(b) On veut calculer la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros.
Or on sait que la variable aléatoire Y_{60} permet de représenter le gain algébrique du joueur à l'issue de 60 parties

$$P(Y_{60} > -50) = P((3X_{60} - 60) > -50)$$
$$= P(3X_{60} > 10)$$
$$= P(X_{60} > \frac{10}{3})$$

Le nombre qui se rapproche de $\frac{10}{3}$ est 4 (car on doit prendre une valeur entière)

$$P(X_{60} \geq 4) = 1 - P(X_{60} < 3)$$
$$= 1 - \sum_{i=0}^{3} e^{-6} \frac{6^i}{i!}$$

D'après le tableau

$$P(Y_{60} \geq 4) = 1 - 0,1512$$
$$= 0,8488$$

Par conséquent lors des 60 parties le joueur a une probabilité de 0,8488 de perdre moins de 50 euros

Partie 2 :

1) Il y a minimum une case atteinte (si toutes les boules vont dans la même case) et il y a ~~maximum~~ une boule dans chaque case donc maximum N cases occupées.

$$\boxed{T_n(\Omega) = [\![1 ; \min(n, N)]\!]}$$

2) • La variable aléatoire T_1 représente le nombre de cases non vides à l'issue d'un lancer
Or lorsqu'une boule est lancée une case est atteinte donc
$\boxed{T_1(\Omega) = \{1\}}$
On en déduit que T_1 suit une loi certaine donc
$$\boxed{P(T_1 = 1) = 1}$$

• La variable aléatoire T_2 représente le nombre de cases non vides à l'issue de 2 lancers
Or lorsque 2 boules sont lancées soit les 2 boules se retrouvent dans une seule case, soit chaque boule va dans une case différente.
$\boxed{T_2(\Omega) = \{1 ; 2\}}$
La probabilité que la deuxième boule aille dans la même case que la première boule est de $\frac{1}{N}$
Donc $\boxed{P(T_2 = 1) = \frac{1}{N}}$

La probabilité que la deuxième boule aille dans une case différente que la première boule est égale à

$$1 - P(T_2 = 1) = 1 - \frac{1}{N}$$
$$= \frac{N-1}{N}$$

Donc $\boxed{P(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}}$

3) • L'événement $[T_n = 1]$ représente la situation où toutes les boules sont dans une seule case.
Les différents lancers de boules sont indépendants
La probabilité que les boules suivantes aillent dans la même case que la première boule est égale à

$$P(T_n = 1) = \bigcap_{k=1}^{n-1} P(T_k = 1)$$

$$\boxed{P(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}}$$

• L'événement $[T_n = 2]$ représente la situation où toutes les boules lancées sont dans seulement 2 cases.
Les différents lancers de boules sont indépendants.
La probabilités que les boules

suivante aillent dans 2 seulement 2 cases est égale à
Donc l'ensemble des 2 cases parmi N sont occupées, il y a donc $\binom{N}{2}$ choix
Avec le dénombrement on a Ω qui est une ensemble de n cases parmi N car chaque case comporte une boule.
Il y a une chance équiprobable que la boule se rende dans une case donc $|\Omega| = N^n$
Donc on a $|T_n = 2| = \binom{N}{2}(2^n - 2)$
On en déduit $\boxed{P(T_n = 2) = \frac{N(N-1)}{2} \times \frac{(2^n - 2)}{N^n}}$

Pour tout n $\boxed{P(T_n = n) = 0}$
et pour tout $n \geq N$ $\boxed{, P(T_n = n) = \frac{N!}{(N-n)!} \times \frac{1}{N^n}}$

4) Les événement $(T_n = k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ et $(T_n = k-1)_{k \in [\![1;n]\!]}$ forment un système complet d'événement.

On a $P_{(T_n = k)}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$ (car la $n+1$ième boule doit aller dans une des cases déjà occupées)
et on a $P_{(T_n = k-1)}(T_{n+1} = k) = \frac{N-(k-1)}{N}$
(car il y a $N-(k-1)$ cases qui ne sont pas occupées)
On a alors d'après la formule des probabilités totales

$$\boxed{P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1)}$$

5) (a) $G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)$ correspond à l'ensemble des valeurs que peut prendre T_n donc $\boxed{G_n(1) = 1}$

(b) G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(T_n = k)$$

Or $E(T_n) = \sum_{k=1}^{\min(N,n)} k\, P(T_n = k)$

Donc $\boxed{G_n'(1) = E(T_n)}$

(c) On a

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} P(T_{n+1} = k)\, x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} \times P(T_n = k-1) \right) \times x^k$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n+1} k\, P(T_n = k)\, x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{N-k+1}{N} \times P(T_n = k-1) \times x^k$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n+1} k P(T_n = k) x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{N}{N} P(T_n = k-1) x^k - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{N} P(T_n = k-1) x^k$$

Or $G_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1}\, P(T_n = k)$

Donc, $G_{n+1}(x) = \frac{x}{N} G_n'(x) + \sum_{j=0}^{n} P(T_n = j) x^{j+1}$

(en posant $k-1=j$) $- \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{n} j P(T_n = j) x^{j+1}$

$$= \frac{x}{N} G_n'(x) + x \sum_{j=0}^{n} P(T_n = j) x^j + 0$$

$$- \frac{x^2}{N} \sum_{j=0}^{n} P(T_n = j) j x^{j-1} + 0$$

$$G_{n+1}(x) = \frac{x}{N} G_n'(x) + x G_n(x) + \frac{x^2}{N} G_n'(x)$$

On a bien ;

$$\boxed{G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2) G_N'(x) + x G_n(x)}$$

(d) On sait que $\boxed{G_n'(1) = E(T_n)}$

On dérive alors G_{n+1} (avec $x \mapsto x - x^2$ et $x \mapsto x$ des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$)

$$G_{n+1}'(x) = \frac{x - x^2}{N} G_n''(x) + \frac{1 - 2x}{N} G_n'(x) + x G_n'(x) + G_n(x)$$

On calcule alors

$$G_{n+1}'(1) = \frac{1-1}{N} G_n''(1) - \frac{1}{N} G_n'(1) + G_n'(1) + G_n(1)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{N}\right) G_n'(1) + G_n(1)$$

9

$$G'_{n+1}(1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$$

On a bien

$$\boxed{E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1}$$

(e) On montre par récurrence

$$P_n : \left\{ E(T_n) = N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \right\} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Initialisation : P_1 s'écrit

$$P_1 : E(T_1) = N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right]$$

$$= 1$$

Donc P_1 est vrai.

Hérédité : On suppose que P_n est vrai pour un certain rang n

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$$

$$= \left(1 - \frac{1}{N}\right) N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] + 1$$

$$= N\left[-\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right] + N\left(-1 - \frac{1}{N}\right) + 1$$

$$= N\left[-\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right] + N$$

$$= N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right]$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $E(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$